CHAPITRE 9 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

HEI 2 - 2013/2014 - A. RIDARD

Ce chapitre permet de généraliser des notions déjà connues dans le plan et dans l'espace telles que le produit scalaire et l'orthogonalité de manière à pouvoir faire de la géométrie dans des espaces plus généraux.

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-ev.

I. Produit scalaire

1. Définitions

Définition (Produit scalaire)**.**

Un produit scalaire sur E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall (u, v) \in E^2,\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ (symétrie)
2. $\forall v \in E,\ u \in E \mapsto \varphi(u, v)$ est linéaire (linéarité par rapport au premier vecteur)
3. $\forall u \in E,\ \varphi(u, u) \geq 0$ (positivité)
4. $\forall u \in E \setminus \{0_E\},\ \varphi(u, u) > 0$ (stricte positivité)

Remarque. $\varphi(u, v)$ se note souvent $(u|v)$, $< u|v >$ ou $u.v$

Définition (Espace préhilbertien - Espace euclidien)**.**

Si E est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.
Si de plus E est de dimension finie, on dit que c'est un espace euclidien.

Exemples.

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien muni de son produit scalaire canonique $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace euclidien muni de son produit scalaire canonique $(A|B) = tr({}^tAB)$
3. $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien muni de son produit scalaire canonique $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$

Sauf mention contraire, les espaces ci-dessus seront toujours munis de leur produit scalaire canonique.

2. Norme associée à un produit scalaire

Dans la suite du chapitre, E est muni du produit scalaire $(.|.)$.

Propriété (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

$\forall (u, v) \in E^2,\ |(u|v)| \leq \sqrt{(u|u)}\sqrt{(v|v)}$.
Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si et seulement si u et v sont liés (colinéaires).

Question. Comment peut-on démontrer cette inégalité dans le cas particulier du plan ?

Propriété (Norme associée à un produit scalaire).

L'application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$ est une norme car elle vérifie :
1. $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (homogénéité)
2. $\forall (u,v) \in E^2,\ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
3. $\forall u \in E,\ \|u\| \geq 0$ (positivité)
4. $\forall u \in E \setminus \{0_E\},\ \|u\| > 0$ (stricte positivité)

La norme $\|.\|$ est appelée la norme associée au produit scalaire $(.|.)$

Exemples.
1. Dans $\mathbb{R}^n$, la norme associée à $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est définie par $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la norme associée à $(A|B) = tr({}^tAB)$ est définie par $\|A\| = \sqrt{tr({}^tAA)}$
3. Dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, la norme associée à $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est définie par $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}$

Dans la suite du chapitre, E est muni du produit scalaire $(.|.)$ associé à la norme $\|.\|$.

Propriété (Egalité de polarisation).

$\forall (u,v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u|v)$

Remarque. Ceci permet d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme

Propriété (Identité du parallélogramme).

$\forall (u,v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

Question. Quelle propriété géométrique du plan cette égalité généralise-t-elle ?

II. Orthogonalité

1. Définitions

Définition (Vecteurs orthogonaux).

Deux vecteurs u et v sont orthogonaux si $(u|v) = 0$

Exemples.
1. Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $(1,1,1,1)$ et $(0,3,-1,-2)$ sont orthogonaux
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux
3. Dans $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$, les vecteurs sin et cos sont orthogonaux.

Définition (Famille orthogonale - orthonormale)**.**

Une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ est orthogonale si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux.
Si de plus les vecteurs sont unitaires (de norme 1), la famille est orthonormale.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, la base canonique est orthonormale
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la base canonique est orthonormale
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$, la base canonique est-elle orthogonale ?

2. Propriétés

Propriété (Théorème de Pythagore)**.**

Si les vecteurs u et v sont orthogonaux, alors $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Questions.

1. Ce résultat est-il conforme au théorème de Pythagore que vous connaissez (par coeur) ?
2. La réciproque est-elle vraie ?

Propriété.

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Question. La réciproque est-elle vraie ?

Propriété (Orthogonalisation de Schmidt)**.**

Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille libre de E.
Il existe alors une famille libre orthogonale $(v_1,\dots,v_n)$ telle que $Vect(u_1,\dots,u_n) = Vect(v_1,\dots,v_n)$.
Dans la méthode de Schmidt, elle se construit par récurrence en posant :
$v_1 = u_1$ puis, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i = \frac{(v_i|u_k)}{(v_i|v_i)}$

Question. Comment peut-on obtenir une famille libre orthonormale ?

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille (e_1,e_2,e_3) avec $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (1,1,0)$ est libre et le procédé d'orthogonalisation de Schmidt fournit la famille orthogonale (u_1,u_2,u_3) où $u_1 = e_1$, $u_2 = (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et $u_3 = (\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la famille (A_1,A_2,A_3) avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est libre et le procédé d'orthogonalisation de Schmidt fournit la famille orthogonale (B_1,B_2,B_3) où $B_1 = A_1$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. Bases orthonormales

Propriété (Existence)**.**

Tout espace euclidien admet une base orthonormale (BON).

La propriété suivante met en évidence l'intérêt de travailler dans une base orthonormale.

Propriété (Coordonnées d'un vecteur, expression du produit scalaire et de la norme dans une BON)**.**

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(e_1,\dots,e_n)$ une BON de E. Alors,

1. $u = \sum_{i=1}^{n} (u|e_i)e_i$ autrement dit les coordonnées de u dans la BON sont ...
2. Si $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$, alors $(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
3. Si $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, alors $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

Question. Ce résultat est-il conforme à ce que vous connaissez déjà dans le plan et dans l'espace ?

Exemple. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $(A_1|A_3) = 1$ et $\|A_2\| = 2$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

III. Théorème de projection

Définition (Sev orthogonaux)**.**

Soit F et G des sev de E.
On dit que F et G sont orthogonaux, et on note $F \perp G$, si pour tout $u \in F$ et tout $v \in G$, $(u|v) = 0$.

Question. Dans l'espace, on définit ainsi l'orthogonalité d'une droite et d'un plan, mais deux plans peuvent-ils être orthogonaux ?

Exemple. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les sev $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux.

Définition (Orthogonal d'un sev)**.**

L'orthogonal du sev F est le sev défini par $F^\perp = \{u \in E | \forall v \in F,\ (u|v) = 0\}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, $\Big(Vect\big((1,1,1)\big)\Big)^\perp = Vect\big((-1,1,0),(-1,0,1)\big)$.

Propriété (Théorème de projection).

Si F est un sev de dimension finie de E (pouvant être lui de dimension infinie), alors $E = F \oplus F^{\perp}$.
Soit p_F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de F et $u \in E$. Alors,

1. $p_F(u) = \sum_{i=1}^{n} (u|e_i)e_i$
2. $\inf_{v \in F} \|u - v\|$ est un minimum atteint en $p_F(u)$ (c'est le seul) et $\|u\|^2 = \|p_F(u)\|^2 + \|u - p_F(u)\|^2$
3. $\sum_{i=1}^{n} |(u|e_i)|^2 \leq \|u\|^2$ (inégalité de Bessel)

Question. Ce résultat est-il conforme à ce que vous connaissez dans l'espace ? Faire un dessin

Remarques.

1. La projection p_F est appelée projection orthogonale sur F
2. La symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$ définie par $s_F = 2p_F - Id_E$ (faire un dessin) est appelée symétrie orthogonale par rapport à F

Exemple. $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - (at + b))\, dt = \frac{1}{180}$.

IV. Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Pour la fin du chapitre, E est de dimension finie donc désigne un espace euclidien.

1. Endomorphismes orthogonaux

Définition (Endomorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle).

Un endomorphisme f de E est dit orthogonal s'il conserve le produit scalaire autrement dit :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ (f(u)|f(v)) = (u|v)$$

Propriété (Caractérisation à l'aide de la norme).

Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme autrement dit :

$$\forall u \in E,\ \|f(u)\| = \|u\|$$

Propriété (Caractérisation matricielle).

Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice dans une **BON** de E.
Alors, f est orthogonal si et seulement si A est orthogonale (${}^tAA = A{}^tA = I$).

Questions.

1. Soit F un sev de E.
   (a) La symétrie orthogonale par rapport à F est-elle un endomorphisme orthogonal de E ?
   (b) Même question avec la projection orthogonale sur F.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, la rotation de centre O et d'angle θ est-elle un endomorphisme orthogonal ?

2. Endomorphismes symétriques

a. Définition et caractérisation

Définition (Endomorphisme symétrique)**.**

Un endomorphisme f est dit symétrique si :

$$\forall (u,v) \in E^2,\ (f(u)|v) = (u|f(v))$$

Propriété (Caractérisation matricielle)**.**

Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice dans une **BON** de E.
Alors, f est symétrique si et seulement si A est symétrique (${}^tA = A$).

Questions.

1. Soit F un sev de E.
   (a) La symétrie orthogonale par rapport à F est-elle un endomorphisme symétrique de E ?
   (b) Même question avec la projection orthogonale sur F.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, la rotation d'axe $Vect\big((0,0,1)\big)$ et d'angle θ est-elle un endomorphisme symétrique ?

b. Réduction des matrices symétriques

Propriété (Orthodiagonalisation)**.**

Une matrice réelle symétrique A est orthodiagonalisable autrement dit il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que $D = {}^tPAP$.

Remarques.

1. Une matrice orthogonale est inversible d'inverse sa transposée
2. Une matrice est orthogonale si et seulement si c'est la matrice de passage d'une BON vers une BON
3. Si f est un endomorphisme symétrique de E, il existe une BON de E formée de vecteurs propres de f. Dans la pratique, pour déterminer cette base, on pourra utiliser le fait que deux sous espaces propres associés à des valeurs propres différentes de f sont orthogonaux (pourquoi ?)

Exemple.

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est réelle symétrique donc orthodiagonalisable.

   Plus précisément, $D = {}^tPAP$ avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est réelle symétrique donc orthodiagonalisable.

   Plus précisément, $D = {}^tPAP$ avec $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

c. Application : réduction des équations des coniques et des quadriques

Exemple (Conique)**.**
Dans le plan muni du repère canonique $(O; e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, on considère la conique :

$$\mathscr{C} \; : \; 2x^2 + 2y^2 + 6xy - 4x + y - 6 = 0$$

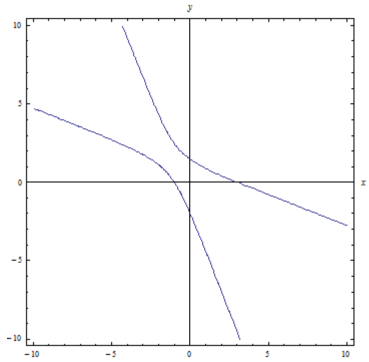
Après changement de base, dans le repère $(O; f_1, f_2)$ avec $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $f_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, on obtient :

$$\mathscr{C} \; : \; 5X^2 - Y^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}X + \frac{5}{\sqrt{2}}Y - 6 = 0$$

Après changement d'origine, dans le repère $(\Omega; f_1, f_2)$ avec $\vec{O\Omega} = \frac{3}{10\sqrt{2}} f_1 + \frac{5}{2\sqrt{2}} f_2$, il vient :

$$\mathscr{C} \; : \; 5U^2 - V^2 = \frac{31}{10}$$

Il s'agit donc d'une hyperbole.



Exemple (Quadrique)**.**
Dans l'espace muni du repère canonique $(O; e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, on considère la quadrique :

$$\mathscr{Q} \; : \; 5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz + 4yz - x - y - z - 1 = 0$$

Après changement de base, dans le repère $(O; f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $f_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, on obtient :

$$\mathscr{Q} \; : \; 6X^2 + 6Y^2 - \sqrt{3}Y - 1 = 0$$

Après changement d'origine, dans le repère $(\Omega; f_1, f_2, f_3)$ avec $\vec{O\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{12} f_2$, il vient :

$$\mathscr{Q} \; : \; 6U^2 + 6V^2 = \frac{9}{8}$$

Il s'agit donc d'un cylindre elliptique.